

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра цифровых технологий,  
математики и экономики

**Методические указания**  
**к самостоятельной работе и выполнению расчетно-графических работ**

**(часть 1)**

Дисциплина Б1.О.05.04 Вычислительная математика и численные методы  
код и наименование дисциплины

Направление подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника  
код и наименование направления подготовки /специальности

Направленность (профиль) Программное обеспечение вычислительной техники и ав-  
томатизированных систем  
наименование направленности (профиля) /специализации образовательной программы

Квалификация выпускника бакалавр  
указывается квалификация (степень) выпускника в соответствии с ФГОС ВО

Мурманск  
2021

Составитель – Авдеева Елена Николаевна, доцент кафедры цифровых технологий, математики и экономики Мурманского государственного технического университета

Методические указания к самостоятельной работе и выполнению РГР рассмотрены и одобрены на заседании кафедры-разработчика: ЦТМиЭ  
21.06.2021, протокол № 12.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ЗАДАНИЯ НА РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКУЮ РАБОТУ № 1.....	5
СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА И ССЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ .....	7
СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО- ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ.....	8
1. Погрешности вычислений.....	8
1.1. Абсолютная и относительная погрешности.....	8
1.2. Вычисления с учетом погрешностей .....	9
2. Решение нелинейных уравнений.....	11
2.1. Изоляция корней.....	11
2.2. Уточнение корней уравнения методом деления отрезка пополам .....	12
3. Решение систем линейных алгебраических уравнений.....	13
3.1. Системы линейных алгебраических уравнений .....	13
3.2. Решение систем линейных уравнений с трехдиагональной матрицей .....	15
3.3. Метод простой итерации .....	15
3.4. Метод Зейделя .....	17
4. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа и его использование .....	17
РЕШЕНИЕ ПРИМЕРНОГО ВАРИАНТА РГР № 1.....	19
Решение.....	23
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА .....	24

## ВВЕДЕНИЕ

В результате изучения дисциплины «Вычислительная математика и численные методы» студенты должны:

- знать основные правила вычисления приближенных значений величин;
- уметь оценивать погрешность полученного результата;
- знать основные методы решения нелинейных уравнений;
- уметь решать системы линейных алгебраических уравнений;
- знать основы интерполирования функций, заданных таблично;
- 

Данные методические рекомендации включают справочный материал, необходимый для выполнения расчетно-графической работы (РГР) № 1 и решение примерного варианта работы, в котором имеются ссылки на используемый справочный материал.

Перед выполнением РГР необходимо изучить теоретический материал по данной теме и закрепить его решением рекомендованных задач в соответствии со ссылками на литературу, затем ознакомиться со справочным материалом и образцом выполнения примерного варианта РГР.

### ЗАДАНИЯ НА РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКУЮ РАБОТУ № 1.

РГР № 1 состоит из четырех задач. Задание для каждой задачи включает в себя ее формулировку и десять вариантов исходных данных.

**Задача 1.** Даны приближенные значения величин  $x$  и  $y$  и известно, что абсолютная погрешность  $\Delta(x) = N/50$ , а относительная погрешность  $\delta(y) = N\%$  (здесь и далее  $N$  – номер варианта). Требуется:

1) вычислить значение величины  $s = \frac{(N+1) \cdot x - y}{x + N \cdot y}$ , оценить предельную

абсолютную погрешность  $\Delta(s)$  и округлить значение  $s$  в соответствии с погрешностью;

2) вычислить приближенное значение функции  $f(x, y) = \ln(x + N) \cdot (N + y^2)$ , оценить предельную абсолютную погрешность значения функции и округлить его в соответствии с погрешностью.

Номер варианта	Значения величин $x$ и $y$	Номер варианта	Значения величин $x$ и $y$
1	$x = 3,5; y = 0,48$	2	$x = 4,1; y = 0,29$
3	$x = 2,6; y = 0,54$	4	$x = 1,4; y = 0,75$
5	$x = 1,7; y = 0,42$	6	$x = 6,5; y = 0,22$
7	$x = 5,2; y = 0,35$	8	$x = 3,8; y = 0,72$
9	$x = 2,3; y = 0,62$	10	$x = 5,9; y = 0,36$

**Задача 2.** Дано уравнение  $N \cdot x^3 + x - N/3 = 0$  ( $N$  – номер варианта). Требуется:

- 1) определить число корней уравнения и найти промежутки их изоляции;
- 2) вычислить значение одного из корней уравнения с точностью  $\varepsilon = 0,01$  при помощи метода деления отрезка пополам.

Указание. Все промежуточные вычисления производить, используя не менее 4-х десятичных знаков после запятой.

**Задача 3.** Решить трёхдиагональную систему линейных уравнений методом прогонки и проверить ответ матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & & & & = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 & & & & = 11 \\ & 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 & & & = 25 \\ & & 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 & & = 45 \\ & & & 4x_4 + 5x_5 & = 41 \end{cases}$$

**Задача 4.** Дана таблица значений функции  $f(x)$ :

$x_i$	$N - 0,7$	$N - 0,3$	$N + 0,1$	$N + 0,5$	$N + 0,9$
$f(x_i)$	$N/3$	$N/6$	$N/7$	$N/5$	$N/2$

( $N$  – номер варианта).

Требуется:

1) по табличным данным построить для функции  $f(x)$  интерполяционный полином 4-го порядка в форме Лагранжа и привести его к стандартному виду целого многочлена;

2) используя полученный полином, вычислить приближенное значение функции  $f(x)$  в точке  $\bar{x} = N + 0,3$ .

Указание Все вычисления производить, используя не менее 4-х десятичных знаков после запятой. Округлить полученное значение  $f(\bar{x})$  до 3-х десятичных знаков после запятой

## СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА И ССЫЛКИ НА ЛИТЕРАТУРУ

№ задачи	Содержание (темы)	Литература
1	Погрешности вычислений. Предельная абсолютная погрешность и предельная относительная погрешности вычислений. Вычисление приближенных значений функции	[1], гл. 1, §1; [2], гл. 1.1; [4], гл. I, работа №1(1), 2(2); [5], §1, 2.1, 2.2.1
2	Методы решения нелинейных уравнений. Метод деления отрезка пополам	[1], гл. 4, §26; [2], гл.5.1, 5.2; [3], гл.IX, № 1168, 1169, 1170, 1178, 1179; [4], гл. IV, работа №1(15); [5], §2
3	Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса. Вычисление определителя с использованием метода Гаусса	[1], гл.3, §19; [2], гл. 2.1, 2.2; [4], гл. III, работа №2(7), 3(8); [5], §4.1.1, 6.1,
4	Полиномиальная интерполяция функций. Интерполяционный полином в форме Лагранжа и его использование	[1], гл. 1, §4, 5; [2], гл. 8.1, 8.2; [3], гл.IX, № 1192-1196; [4], гл. VI, работа №1(32)

Примечание. Ссылки на литературу в таблице даны в соответствии с номерами в списке рекомендуемой литературы.

## СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

### 1. Погрешности вычислений

#### 1.1. Абсолютная и относительная погрешности

Практические вычисления проводятся над числами, которые могут быть заданы не только точно, но и приближенно. Например, число  $1/3$  можно записать в виде десятичной дроби только приближенно.

Правило округления чисел: если первая из отбрасываемых цифр меньше пяти, то все сохраняемые цифры не изменяются, а если первая отбрасываемая цифра больше или равна пяти, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу.

Примеры.  $13523 \approx 13500 = 135 \cdot 10^2$ ,  $2,1564 \approx 2,16$ ,  $-0,325 \approx -0,33$ .

Обозначим  $a^*$  – точное значение некоторой величины,  $a$  – приближенное значение этой величины (приближенное число).

Величину  $|a - a^*|$  называют *абсолютной погрешностью числа  $a$* .

В большинстве случаев  $a^*$  неизвестно, однако, можно указать некоторое число  $\Delta(a)$ , оценивающее абсолютную погрешность приближенного числа, т.е. удовлетворяющее условию  $|a - a^*| \leq \Delta(a)$ . Число  $\Delta(a)$  называют *предельной абсолютной погрешностью числа  $a$* . Обычно предельную абсолютную погрешность называют просто абсолютной погрешностью и записывают так:  $a^* = a \pm \Delta(a)$ , причем в числах  $a$  и  $\Delta(a)$  сохраняют одинаковое число знаков после запятой. При округлении предельной абсолютной погрешности его значение всегда берется «с избытком», т.е. последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу.

Примеры.  $\pi^* = 3,1416 \pm 0,0001$ ;  $\frac{2}{3} = 0,67 \pm 0,01$ .

*Предельной относительной погрешностью числа  $a$*  называют величину

$\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a^*|}$  или  $\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a^*|} \cdot 100\%$ . В случае, когда  $a^*$  неизвестно, по-

лагают, что  $\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|}$  или  $\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|} \cdot 100\%$ . Обычно предельную относительную погрешность числа называют просто *относительной погрешностью*.

Примеры.  $\pi^* = 3,1416 \pm 0,0001 \Rightarrow \delta(\pi) = \frac{\Delta(\pi)}{|\pi|} \approx \frac{0,0001}{3,1416} \approx 0,00003;$

$$\frac{2}{3} = a^* = 0,67 \pm 0,01 \Rightarrow \delta(a) = \frac{\Delta(a)}{\left| \frac{2}{3} \right|} \cdot 100\% \approx \frac{0,01}{0,67} \cdot 100\% \approx 1,5\% .$$

Первая слева цифра числа, отличная от нуля, и все цифры, расположенные правее нее, называются *значащими цифрами числа*. В записи погрешностей обычно оставляют одну значащую цифру, например,  $\Delta(a) = 4 \cdot 10^5$ ,  $\Delta(b) = 0,05$ , или  $\delta(x) = 3\%$ .

Если приближенное число записано без указания его погрешности, то по умолчанию считается, что его абсолютная погрешность не превосходит единицы последнего сохраненного разряда в записи числа, например, запись  $a \approx 2,320$  означает, что  $\Delta(a) = 0,001$ .

## 1.2. Вычисления с учетом погрешностей

При выполнении действий над приближенными числами происходит накопление погрешностей, и полученный результат не может быть точнее исходных данных.

Основные формулы для вычисления погрешностей арифметических операций:

$$\Delta(c^* \cdot a) = c^* \cdot \Delta(a), \text{ если } c^* \text{ – точное число (константа);}$$

$$\Delta(a \pm b) = \Delta(a) + \Delta(b); \quad (1)$$

$$\Delta(ab) = |a| \cdot \Delta(b) + |b| \cdot \Delta(a);$$

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{|a| \cdot \Delta(b) + |b| \cdot \Delta(a)}{b^2}; \quad (2)$$

$$\delta(a \pm b) = \frac{|a| \cdot \delta(b) + |b| \cdot \delta(a)}{|a \pm b|};$$

$$\delta(ab) = \delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta(a) + \delta(b). \quad (3)$$

При выполнении арифметических операций обычно все промежуточные вычисления осуществляют с одной или двумя запасными десятичными цифрами по сравнению с желаемым результатом, а затем полученный результат округляют: либо до требуемой в задаче точности, либо в соответствии абсолютной погрешностью результата (например, если  $a = 12305362$ ,  $\Delta(a) = 2 \cdot 10^5$ , то  $a \approx 123 \cdot 10^5$ ; если  $b = 1,2345$ ,  $\Delta(b) = 0,05$ , то  $b \approx 1,23$ ).

### Примеры.

1. Найти разность чисел:  $a^* = 1,24 \pm 0,03$  и  $b^* = 7,361 \pm 0,007$ .

Решение. Погрешность:  $\Delta(a - b) = \Delta(a) + \Delta(b) = 0,037 \approx 0,04$  (формула (1)).

Результат вычитания:  $a - b = (1,24 - 7,361) \pm 0,04 \approx -6,12 \pm 0,04$ .

2. Найти отношение чисел:  $x = 0,255$  и  $y = 34,01$ , если известна погрешность  $\delta(x) = 1\%$ .

Решение. Приближенное число  $y$  записано без указания его погрешности,

следовательно,  $\Delta(y) = 0,01$ , откуда находим:  $\delta(y) = \frac{\Delta(y)}{|y|} = \frac{0,01}{34,01} \approx 0,0003$ .

$$z = \frac{x}{y} = \frac{0,255}{34,01} \approx 0,007498,$$

$$\delta(z) = \delta\left(\frac{x}{y}\right) = \{\text{формула (3)}\} = \delta(x) + \delta(y) = 0,01 + 0,0003 = 0,0103 \approx 0,01,$$

$$\Delta(z) = z \cdot \delta(z) \approx 0,007498 \cdot 0,01 \approx 0,00008.$$

Результат деления:  $z = \frac{x}{y} = 0,00750 \pm 0,00008$ .

Если значение аргумента функции  $y = f(x)$  – приближенное число  $x$ , то абсолютную погрешность значения функции оценивают по следующей формуле:

$\Delta(y) \leq \max_x |f'(x)| \cdot \Delta(x)$ , где максимум модуля производной вычисляется как его наибольшее значение на промежутке  $x \in [x - \Delta(x); x + \Delta(x)]$ .

*Абсолютную погрешность значения функции 2-х аргументов  $z = f(x, y)$*

можно оценить по формуле:

$$\Delta(z) \leq \max_D |f'_x(x, y)| \cdot \Delta(x) + \max_D |f'_y(x, y)| \cdot \Delta(y), \quad (4)$$

где максимум модулей частных производных находят среди всех их значений в области

$$D: \begin{cases} x - \Delta(x) \leq x^* \leq x + \Delta(x), \\ y - \Delta(y) \leq y^* \leq y + \Delta(y). \end{cases}$$

Аналогично определяется абсолютная погрешность значения функции трёх и более переменных.

## 2. Решение нелинейных уравнений

### 2.1. Изоляция корней

Пусть требуется найти корни (решения) уравнения

$$f(x) = 0 \quad (5),$$

где  $f(x)$  – нелинейная функция.

В общем случае можно говорить лишь о приближенном вычислении корней уравнения (5), т.е. о получении такого значения аргумента, при котором  $f(x) \approx 0$ . Принято считать, что точное решение  $x^*$  этого уравнения получено с точностью  $\varepsilon$ , если для полученного приближенного решения  $x$  выполнено условие  $|x - x^*| < \varepsilon$ .

Если непрерывная функция  $f(x)$  является знакопеременной в области определения, то уравнение (5) имеет конечное или бесконечное количество корней. Каждый из корней получают, используя численные методы, после процедуры отделения корней.

*Отделить корень* уравнения (5) – значит найти такой интервал  $(a, b)$ , в котором содержится корень уравнения, причем только один.

Известно, что если на концах некоторого промежутка  $[a, b]$  непрерывная функция  $f(x)$  имеет разные знаки, т.е.  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , а внутри этого промежутка производная  $f'(x)$  знак не меняет, то в интервале  $(a, b)$  существует корень уравнения (5), причем только один.

Процедура отделения корней может быть осуществлена графически (построением графика функции  $f(x)$ ) или с помощью проверки знака функ-

ции на некотором множестве значений  $x$ , например, на множестве равноотстоящих точек на оси абсцисс.

## 2.2. Уточнение корней уравнения методом деления отрезка пополам

Пусть требуется решить уравнение (5) с заданной точностью  $\varepsilon$ . Известен промежуток изоляции корня  $x^*$  – промежуток  $[a, b]$ , на концах которого непрерывная функция  $f(x)$  имеет разные знаки, а внутри этого промежутка производная  $f'(x)$  знак не меняет.

Процедура *уточнения корня* заключается в построении последовательности точек  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ , такой, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ . Процесс вычисления заканчивается, когда получено  $x_k$ , удовлетворяющее условию

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon. \quad (6)$$

Опишем метод уточнения корня, называемый *методом деления отрезка пополам*, или *методом дихотомии*, или *методом бисекции*. Иногда этот метод называют еще *методом проб*.

Уточнение корня методом деления отрезка пополам осуществляется в следующем порядке:

1) вводим обозначения:  $a_0 = a, b_0 = b$ ;

2) вычисляем  $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ ;

3) из двух интервалов  $(a_0, x_0)$  и  $(x_0, b_0)$  выбираем тот, на концах которого  $f(x)$  имеет разные знаки, и обозначаем концы этого интервала  $a_1, b_1$ ;

4) вычисляем  $x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ ;

5) из двух интервалов  $(a_1, x_1)$  и  $(x_1, b_1)$  выбираем тот, на концах которого  $f(x)$  имеет разные знаки, и обозначаем концы этого интервала  $a_2, b_2$ ;

6) вычисляем  $x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$ ,

и так далее, пока не будет выполнено условие  $|b_k - a_k| \leq 2\varepsilon$ , – тогда прибли-

женное значение корня  $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$  будет удовлетворять условию (6), т.е.



$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – вектор-столбец неизвестных,}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ – вектор-столбец свободных членов,}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – матрица коэффициентов системы.}$$

Если в системе  $m = n$ , то матрица  $A$  – квадратная.

Методы решения систем линейных уравнений можно разбить на две группы: *точные* (прямые или конечные) и *приближенные* (итерационные или методы последовательного приближения).

К *точным* методам относятся такие, которые в предположении, что вычисления ведутся точно (без округлений), за конечное, заранее оцениваемое количество шагов вычислений приводят к точным значениям неизвестных  $x_i$ . Фактически, из-за почти неизбежных округлений при вычислениях, результаты, получаемые точными методами, будут содержать погрешности. Точными являются, например, метод вычисления по формулам: Крамера и метод Гаусса (рассмотрены в курсе Математика).

К *приближенным* относятся такие методы, которые даже в предположении отсутствия погрешности округлений доставляют решение системы лишь с заданной точностью. Точное решение системы достигается асимптотически как результат бесконечного процесса. На практике при использовании итерационных методов ограничиваются вычислением конечного числа приближений в зависимости от допустимого уровня погрешности. Примерами приближенных методов являются метод простой итерации и его модификация — метод Зейделя.

В прикладных задачах довольно часто используются линейные системы, при решении которых можно не заботиться о «вредном» воздействии неустранимых погрешностей на решение, спокойно применяя простейшую

схему гауссова исключения. Это системы, для матриц которых выполнено *условие диагонального преобладания*:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \text{ для всех } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

### 3.2. Решение систем линейных уравнений с трехдиагональной матрицей

Необходимость решать подобные системы возникает при реализации различных методов решения дифференциальных уравнений.

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 x_1 + c_1 x_2 = f_1, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = f_2, \\ \quad a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 = f_3, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = f_{n-1}, \\ \quad a_n x_{n-1} + b_n x_n = f_n. \end{array} \right. \quad \text{– система с трехдиагональной матрицей.}$$

Для решения таких систем применяют *метод прогонки*.

Алгоритм метода прогонки для систем с трехдиагональными матрицами можно представить в виде реализации двух этапов:

1) *Прямая прогонка*:

Вычисляются прогоночные коэффициенты  $p_i$  и  $q_i$  по формулам:

$$p_1 = \frac{c_1}{b_1}, \quad p_i = \frac{c_i}{b_i - p_{i-1} a_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \quad (10.1)$$

$$q_1 = \frac{f_1}{b_1}, \quad q_i = \frac{f_i - q_{i-1} a_i}{b_i - p_{i-1} a_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (10.2)$$

**Замечание.** Ввиду опасности обращения знаменателя в ноль в этих формулах следует помнить об *условиях применимости метода прогонки* – условиях диагонального преобладания в исходной матрице:  $|b_i| > |a_i| + |c_i|$  для всех  $i$ .

2) *Обратная прогонка*:

Вычисляется искомое решение по формулам:

$$x_n = q_n, \quad x_i = q_i - p_i x_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1 \quad (11)$$

### 3.3. Метод простой итерации

Пусть требуется решить систему, заданную матричным уравнением  $Ax$

$= \mathbf{b}$  с квадратной матрицей  $A$ .

Будем считать, что решение системы существует и единственно.

Приведем уравнение

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

к виду, удобному для итерирования

$$\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{f}, \text{ где} \quad (12)$$

$C$  – некоторая матрица;  $\mathbf{f}$  – вектор-столбец свободных членов.

$n \times n$

Удобство состоит в том, что, задав начальное приближение

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \dots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

и, подставив его в правую часть уравнения (4), слева получим следующее приближение:

$$\mathbf{x}^{(1)} = C\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{f}$$

и, аналогично, каждое последующее приближение

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = C\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В качестве *условия сходимости* процесса к решению системы можно принять условие:

*Максимум построчной суммы модулей элементов матрицы  $C$  меньше единицы:*

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |c_{ij}| = q < 1.$$

Условия сходимости выполняются, если в матрице  $A$  диагональные элементы преобладают, т. е.  $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и хотя бы для одного  $i$  нера-

венство строгое. Другими словами, модули диагональных коэффициентов в каждом уравнении системы больше суммы модулей недиагональных коэффициентов (свободные члены не рассматриваются).

**Критерий остановки** итерационного процесса – выполнение условия:

$$\frac{q}{1-q} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon, \text{ где } \varepsilon - \text{ заданная точность.} \quad (13)$$

Для проверки выполнимости критерия остановки процесса следует проверить выполнение условия для каждой компоненты вектора  $(k+1)$ -го приближения, используя два приближения (последнее и предпоследнее).

Тогда  $x^{(*)} \approx x^{(k+1)}$ .

### 3.4. Метод Зейделя

Метод Зейделя является модификацией метода простых итераций. Он заключается в том, что при вычислении  $(k+1)$ -го приближения неизвестного  $x_i^{(k+1)}$  (компонента вектора) при  $i > 1$  используются уже вычисленные ранее  $(k+1)$ -е приближения неизвестных  $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$ .

**Условие сходимости и критерий остановки** итерационного процесса для метода простой итерации можно использовать и для метода Зейделя.

## 4. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа и его использование

В основе многих численных методов лежит замена одной функции  $f(x)$ , которая не может быть использована для решения некоторой задачи, другой функцией  $\varphi(x)$ , близкой к  $f(x)$  в некотором смысле и обладающей свойствами, которые позволят производить над нею необходимые вычислительные операции. Такую замену принято называть *аппроксимацией* функции  $f(x)$ . Разные виды аппроксимации отличаются выбором аппроксимирующей функции  $\varphi(x)$ , критериями близости функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  и др.

Пусть на промежутке  $[a, b]$  задана *сетка* – множество точек  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ , называемых *узлами сетки*. И пусть функция  $f(x)$  задана лишь в узловых точках, т.е. известны ее значения  $y_i = f(x_i)$  для  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Такие данные удобно представить в виде таблицы:

$x_i$	$x_0$	$x_1$	...	$x_n$
$f(x_i)$	$y_0$	$y_1$	...	$y_n$

Кроме того, пусть задана некоторая точка  $\bar{x} \in [a, b]$ , не совпадающая ни с одной из узловых точек.

*Задача интерполяции функции* состоит в том, чтобы по имеющейся таблице значений  $f(x)$  найти ее значение в точке  $\bar{x} \in [a, b]$  с некоторой степенью точности.

Для решения этой задачи строится аппроксимирующая функция  $\varphi(x)$ , значения которой в узловых точках совпадают с заданными значениями функции:  $\varphi(x_i) = y_i$  для  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Геометрически это означает, что графики функций  $\varphi(x)$  и  $f(x)$  пересекаются или касаются друг друга не менее, чем в  $(n+1)$  заданных точках. Удобной для этой цели функцией  $\varphi(x)$  является полином (многочлен)  $n$ -го порядка:

$$\varphi(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Одной из форм представления интерполяционного полинома является *интерполяционный полином в форме Лагранжа*:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \left( \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \cdot y_i \right).$$

Интерполяционный полином  $n$ -го порядка в форме Лагранжа состоит из  $(n+1)$ -го слагаемого, каждое из которых является многочленом  $n$ -го порядка.

Например, интерполяционный полином 4-го порядка в форме Лагранжа состоит из 5 слагаемых и в развернутом виде выглядит так:

$$\begin{aligned} L_4(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} \cdot y_0 + \\ &+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} y_2 + \\ &+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} y_3 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} y_4. \end{aligned}$$

Если задать на промежутке  $[a, b]$  *равномерную сетку* с шагом  $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{4}$ , т.е. точки  $x_i = x_0 + ih$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ) тогда формула полинома  $L_4(x)$  будет иметь более простой вид:

$$L_4(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(-1)(-2)(-3)(-4)h^4} \cdot y_0 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{1 \cdot (-1)(-2)(-3)h^4} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{2 \cdot 1 \cdot (-1)(-2)h^4} y_2 + \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1)h^4} y_3 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot h^4} y_4. \quad (14)
\end{aligned}$$

Чтобы найти приближенное значение функции  $f(x)$  в точке  $\bar{x} \in [a, b]$ , следует воспользоваться формулой  $f(\bar{x}) \approx L_4(\bar{x})$ . При этом можно не приводить полученный полином в форме Лагранжа к стандартному виду  $P_n(x)$ , если это не требуется для другой цели, а просто подставить значение  $x = \bar{x}$  в формулу (14).

### РЕШЕНИЕ ПРИМЕРНОГО ВАРИАНТА РГР № 1

**Задача 1.** Даны приближенные значения величин  $x = 1,6$ ,  $y = 0,35$ , где  $\Delta(x) = 0,02$ ,  $\delta(y) = 4\%$ . Требуется:

1) вычислить значение величины  $s = \frac{y}{3y-x}$ , оценить предельную абсолютную погрешность  $\Delta(s)$  и округлить значение  $s$  в соответствии с погрешностью;

2) вычислить приближенное значение функции  $f(x, y) = \sqrt{x} \cdot (2x - 3y)$ , оценить предельную абсолютную погрешность значения функции и округлить его в соответствии с погрешностью.

Решение.

1). Вычислим приближенное значение  $s$ :  $s = \frac{y}{3y-x} = \frac{0,35}{1,05-1,6} \approx -0,6364$ .

Оценим предельную абсолютную погрешность результата по формуле (2), в которой

$$\Delta(x) = 0,02; \Delta(y) = y \cdot \delta(y) = 0,35 \cdot 0,04 = 0,014,$$

следовательно, по формуле (1) получаем:

$$\Delta(3y-x) = 3\Delta(y) + \Delta(x) = 0,062.$$

Предельная абсолютная погрешность значения  $s$ :

$$\Delta(s) = \Delta\left(\frac{y}{3y-x}\right) = \frac{|y| \cdot \Delta(3y-x) + |3y-x| \cdot \Delta(y)}{(3y-x)^2} = \frac{0,35 \cdot 0,062 + 0,55 \cdot 0,014}{(-0,55)^2} \approx 0,1.$$

Округлим значение  $s$ , оставляя столько же цифр после запятой, сколько их в записи абсолютной погрешности результата:  $\Delta(s) = 0,1$ , следовательно, значение  $s$  округляем до одного знака после запятой:  $s \approx -0,6$ .

2). Вычислим приближенное значение функции  $f(x, y) = \sqrt{x} \cdot (2x - 3y)$ :

$$f(1,6; 0,35) = \sqrt{1,6} \cdot (3,2 - 1,05) \approx 1,2649 \cdot 2,15 \approx 2,7196.$$

Оценим предельную абсолютную погрешность результата по формуле (4), в которой:

$$f'_x = \frac{2x-3y}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot 2 = 3\sqrt{x} - \frac{3y}{2\sqrt{x}}; \quad f'_y = -3\sqrt{x};$$

$$D: \begin{cases} 1,6 - 0,02 \leq x^* \leq 1,6 + 0,02, \\ 0,35 - 0,014 \leq y^* \leq 0,35 + 0,014. \end{cases}$$

Максимальные значения модулей частных производных:

$$\begin{aligned} \max_D |f'_x(x, y)| &= \max_D (3\sqrt{x}) - \min_D (3y) / \max_D (2\sqrt{x}) = \\ &= 3\sqrt{1,62} - 3 \cdot 0,336 / (2\sqrt{1,62}) \approx 3,4224; \end{aligned}$$

$$\max_D |f'_y(x, y)| = \max_D | -3\sqrt{x} | = 3\sqrt{1,62} \approx 3,8184.$$

Предельная абсолютная погрешность значения функции:

$$\begin{aligned} \Delta(f) &\leq \max_D |f'_x(x, y)| \cdot \Delta(x) + \max_D |f'_y(x, y)| \cdot \Delta(y) \approx \\ &\approx 3,4224 \cdot 0,02 + 3,8184 \cdot 0,014 \approx 0,122 \approx 0,2 \end{aligned}$$

(округление абсолютной погрешности производится «с избытком»).

Округлим значение функции, оставляя столько же цифр после запятой, сколько их в записи абсолютной погрешности результата:  $\Delta(f) = 0,2$ , тогда  $f(1,6; 0,35) \approx 2,7$ .

Ответы: 1)  $s \approx -0,6$ ;  $\Delta(s) = 0,1$ ;  
2)  $f(1,6; 0,35) \approx 2,7$ ;  $\Delta(f) = 0,2$ .

**Задача 2.** Дано уравнение:  $x^5 + 3x - 2,5 = 0$ . Требуется:

- 1) определить число корней уравнения и найти промежутки их изоляции;
- 2) вычислить значение одного из корней уравнения с точностью  $\varepsilon = 0,01$  при помощи метода деления отрезка пополам.

Решение.

1). Будем искать такой интервал  $(a, b)$ , в котором содержится корень уравнения  $x^5 + 3x - 2,5 = 0$ , причем только один. Для этого найдем производную  $f'(x) = 5x^4 + 3$ . Из того, что  $f'(x) > 0$  для любых значений  $x$ , следует, что функция  $f(x) = x^5 + 3x - 2,5$  монотонно возрастающая, значит, уравнение  $f(x) = 0$  имеет только один корень (точку пересечения графика  $y = f(x)$  с осью абсцисс).

Подбором находим две точки, в которых функция имеет разные знаки: например, точки  $a = 0,5$ ,  $b = 1$  (чем ближе друг к другу эти точки, тем меньше потребуется сделать вычислений на этапе уточнения корня). Проверка:

$f(0,5) = (0,5)^5 + 3 \cdot 0,5 - 2,5 \approx -0,9 < 0$ ,  $f(1) = 1^5 + 3 - 2,5 = 1,5 > 0$ , следовательно,  $f(a) \cdot f(b) < 0$  и корень уравнения  $x^* \in [0,5; 1]$ .

2). Уточним корень уравнения  $x^5 + 3x - 2,5 = 0$  с точностью  $\varepsilon = 0,01$  методом деления отрезка пополам.

Для этого обозначим: номер шага  $k = 0$ ;  $a_0 = a = 0,5$ ;  $b_0 = b = 1$ , и вычислим начальное значение корня  $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = 0,75$  и значение функции  $f(x_0) = x_0^5 + 3x_0 - 2,5 \approx -0,0127$  (все промежуточные вычисления будем производить, используя 4 десятичных знака после запятой).

Для  $k = 1$  находим  $a_k, b_k$ . По формулам (8.1) – (8.2). Поскольку  $f(x_0) < 0$ , то выполнены условия  $f(x_0) \cdot f(a_0) > 0$ ,  $f(x_0) \cdot f(b_0) < 0$ , поэтому  $a_1 := x_0$

и  $b_1 := b_0$ , т.е.  $[a_1; b_1] = [0,75; 1]$ . После этого вычислим  $x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 0,875$ , значение функции  $f(x_1) \approx 0,6379$  и проверим выполнение условия (9):

$|b_1 - a_1| \leq 2\varepsilon$ . Получаем:  $|b_1 - a_1| = 0,25 > 2\varepsilon = 0,02$ . Условие не выполнено, следовательно, переходим к следующему шагу.

Для  $k = 2, 3, \dots$  находим  $a_k, b_k, x_k$  по формулам (8.1) – (8.3), проверяя на каждом шагу выполнение условия (9):  $|b_k - a_k| \leq 2\varepsilon$  и, если оно выполнено, определяем знак  $f(x_k)$ . Если  $f(x_k) < 0$ , то на следующем шаге изменяем  $a_k$ , а если  $f(x_k) > 0$ , то изменяем  $b_k$ , чтобы на каждом шаге выполнялось условие  $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$ . Результаты расчетов заносим в таблицу:

$k$	$a_k$	$b_k$	$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$	$ b_k - a_k $	$f(x_k) = x_k^5 + 3x_k - 2,5$
0	0,5	1	0,75	0,5	$-0,0127 < 0$
1	0,75	1	0,875	0,25	$0,6379 > 0$
2	0,75	0,875	0,8125	0,125	$0,2916 > 0$
3	0,75	0,8125	0,7813	0,0625	$0,1348 > 0$
4	0,75	0,7813	0,7656	0,0313	$0,0600 > 0$
5	0,75	0,7656	0,7578	0,0156	

Процесс вычислений закончен, т.к.  $|b_5 - a_5| = 0,0156 < 2\varepsilon = 0,02$ . Последнее значение  $x_5$  округляем в соответствии с заданной точностью  $\varepsilon = 0,01$ :  $x^* \approx x_5 \approx 0,76$ .

Ответ:  $x^* = 0,76 \pm 0,01$ .

**Задача 3.** Решить трёхдиагональную систему линейных уравнений методом прогонки и проверить ответ матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & & & & & = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 & & & & & = 11 \\ & 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 & & & & = 25 \\ & & 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 & & & = 45 \\ & & & 4x_4 + 5x_5 & & = 41 \end{cases}$$

Решение

Решение удобнее оформить в таблице:

$i$	$a$	$b$	$c$	$f$	$p_i$	$q_i$	$x_i$
1	0	1	1	3	1	3	1
2	1	2	2	11	2	8	2
3	2	3	3	25	-3	-9	3
4	3	4	4	45	4/13	5 7/13	4
5	4	5	0	41	0	5	5

Столбцы заполняются по формулам

$$p_1 = \frac{c_1}{b_1}, \quad p_i = \frac{c_i}{b_i - p_{i-1}a_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$q_1 = \frac{f_1}{b_1}, \quad q_i = \frac{f_i - q_{i-1}a_i}{b_i - p_{i-1}a_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

В последнем столбце находится решение системы, которое находится по формулам

$$x_n = q_n, \quad x_i = q_i - p_i x_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

Ответ: решение системы:  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = 2$ ;  $x_3 = 3$ ;  $x_4 = 4$ ;  $x_5 = 5$ .

**Задача 4.** Дана таблица значений функции  $f(x)$ :

$x_i$	-0,5	-0,2	0,1	0,4	0,7
$f(x_i)$	3,2216	5,3468	4,9472	1,5327	2,5003

Требуется:

1) по табличным данным построить для функции  $f(x)$  интерполяционный полином 4-го порядка в форме Лагранжа и привести его к стандартному виду целого многочлена;

2) используя полученный полином, вычислить приближенное значение функции  $f(x)$  в точке  $\bar{x} = 0,2$ .

Решение.

1). Все значения  $x_i$  в данной таблице образуют равномерную сетку:  $x_i = x_0 + ih$ , где  $x_0 = -0,5$ ,  $h = 0,3$  для  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ . Построим интерполяционный полином Лагранжа 4-го порядка по формуле (14), подставляя в нее значения  $x_i$  и  $y_i = f(x_i)$ :

$$L_4(x) = \frac{(x+0,2)(x-0,1)(x-0,4)(x-0,7)}{(-1)(-2)(-3)(-4)0,3^4} \cdot 3,2216 +$$

$$+ \frac{(x+0,5)(x-0,1)(x-0,4)(x-0,7)}{1 \cdot (-1)(-2)(-3)0,3^4} \cdot 5,3468 + \frac{(x+0,5)(x+0,2)(x-0,4)(x-0,7)}{2 \cdot 1 \cdot (-1)(-2)0,3^4} \cdot 4,9472 +$$

$$+ \frac{(x+0,5)(x+0,2)(x-0,1)(x-0,7)}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1)0,3^4} \cdot 1,5327 + \frac{(x+0,5)(x+0,2)(x-0,1)(x-0,4)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0,3^4} \cdot 2,5003.$$

Приведем полученный полином к стандартному виду, произведя упрощения:

$$L_4(x) \approx 16,572(x^4 - x^3 + 0,15x^2 + 0,05x - 0,0056) - 110,016(x^4 - 0,7x^3 - 0,21x^2 +$$

$$+ 0,167x - 0,014) + 152,691(x^4 - 0,4x^3 - 0,39x^2 + 0,086x + 0,028) - 31,537(x^4 -$$

$$- 0,1x^3 - 0,39x^2 - 0,031x + 0,007) + 12,8616(x^4 + 0,2x^3 - 0,21x^2 - 0,022x +$$

$$- + 0,004) = 40,5716x^4 + 5,0888x^3 - 24,3618x^2 - 3,7180x + 5,5535$$

(промежуточные вычисления производим, используя 4 десятичных знака после запятой).

2). Вычислим значение  $f(\bar{x})$  с округлением до 3-го знака после запятой:

$$f(\bar{x}) = f(0,2) \approx L_4(0,2) \approx$$

$$\approx 40,5716 \cdot 0,2^4 + 5,0888 \cdot 0,2^3 - 24,3618 \cdot 0,2^2 - 3,7180 \cdot 0,2 + 5,5535 \approx 3,941.$$

Ответы:

1) интерполяционный полином в стандартном виде:

$$L_4(x) \approx 40,5716x^4 + 5,0888x^3 - 24,3618x^2 - 3,7180x + 5,5535;$$

1) значение  $f(\bar{x}) = f(0,2) \approx 3,941.$

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Волков Е. А. Численные методы: учебное пособие для вузов / Е. А. Волков. – М.: Наука, 1987 248 с.

2. Вержбицкий В. М. Основы численных методов: учебник для вузов / В. М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2002.– 840 с.

3. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для втузов. В 2 ч. Ч.2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова.– М.: Оникс: Мир и образование, 2005.– 416 с.

4. Воробьева, Г. Н., Данилова, А. Н. Практикум по численным методам / Г. Н. Воробьева, А.Н. Данилова.– М.: Высш. школа, 1979.– 184 с.

5. Мостовская Л.Г. Вычислительная математика: учебно-методическое пособие ч.1 / Л. Г. Мостовская, А.-В.И.Середа, – Мурманск, 2001. – 86 с.